BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

О НЕКОТОРЫХ АКТУАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ИЗУЧЕНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

Э.Г.ОРУДЖЕВ

Бакинский Государственный Университет

Elsharorucov63@mail.ru

В работе с помощью моделей технических динамических систем со случайными воздействиями построена математическая модель финансового рынка в непрерывном времени в более общем виде векторно-матричного дифференциального уравнения, зависимая переменная которого является вектором состояния финансового рынка, координатами этого вектора являются случайные значения текущей доходности финансового инструмента (котировки курсовых изменений акций, валюты и т.п.). При определенных ограничениях на коэффициенты дифференциальной системы изучены свойства решений, математическое ожидание, дисперсии этих решений, решена система дифференциальных уравнений для ковариационной матрицы, а также затронуты вопросы устойчивости и неустойчивости состояния рынка, взрывных колебаний, что может привести к большим финансовым катастрофам.

Современные финансово-экономические науки больше не поддаются исследованию обычными теоретическими методами. Применение математических методов и на их основе разработка новейших компьютерных программ в финансах и экономике является признаком нашего времени. Уровень развития экономического процесса сейчас характеризуется степенью использования математического аппарата. Это положение для финансовых рынков отражается в данной работе. Для экономико-математического анализа финансовых рынков и их динамического развития, анализа темпа прироста капитала, фильтрации тренда на фоне белого шума, прогнозирования состояния рынка, на их основе формирования оптимальной структуры портфелей ценных бумаг и принятия оптимальных динамических стратегий для извлечения максимально возможной прибыли из рынка можно воспользоваться описанным в данной работе стохастическими дифференциальными уравнениями, с помощью которых развиваются количественно-качественные и информативные подходы к изученным вопросам. Изучение названных процессов и динамические стратегии инвестирования являются актуальными проблемами современной финансовой математики.

Известно [1], что процесс функционирования финансового рынка имеет выраженную статистическую природу и общепринято считать, что курсы обращающихся на рынке финансовых инструментов являются случайными событиями. Поэтому в качестве достаточно общего описания спотового и срочного рынков можно рассматривать математическую модель векторного случайного процесса, координатами которого могут быть случайные курсы или же эффективности обращающихся на рынке финансовых инструментов, а также их производные по времени до второго порядка включительно. По экономическому смыслу математическое ожидание первой производной случайного процесса определяет скорость изменения тренда процесса (в представленной информации непрерывных временных рядов), а математическое ожидание второй производной определяет ускорение в изменении тренда. Предположим, что значения эффективностей являются реализациями случайных стационарных процессов, что означает неизменность во времени его статистических характеристик и являются элементами генеральной совокупности с нормальным законом распределения. Эти допущения позволяют известными методами оценивать их моментные характеристики и экстраполировать результаты оценивания, далее осуществить принятие оптимальных решений по последним данным.

Как показано в [2], с помощью дифференциальных уравнений можно описывать динамику изменения угловых или траекторных координат как реакцию на возмущающие или управляющие воздействия в правой части соответствующих уравнений и их решения описывают случайные процессы, и как следует из [3], с математической точки зрения модели функционирования финансового рынка как стохастическая дифференциальная система и модели технических динамических систем будут одинаковыми по своей форме и мы придем к тому, что математическая модель финансового рынка в непрерывном времени в более общем виде с учетом неавтономности может быть представлена в виде векторно-матричного дифференциального уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = V(X,t) + \alpha(X,t)N(t) \tag{1}$$

или

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v(x_1 \ldots, x_n, t) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x_1 \ldots, x_n, t) n_k \,, \tag{1'}$$

здесь матрица – столбец функция $X(t)$: $X(t) = colon[x_1(t) \ldots, x_n(t)]$ является вектором состояния финансового рынка, координатами которого являются, например, случайные значения текущей доходности i-го $(i = \overline{1,n})$ финансового инструмента (котировки курсовых изменений акций, валюты и т.п.), $v(x_1 \ldots, x_n, t)$ - скорость изменения тренда в динамике доходности, $\alpha_k(x_1, \ldots, x_n, t) n_k$ - флуктуация в виде белого шума (т.е. временные ряды, лежащая в их основе переменная, которая имеет среднюю, равную нулю, постоянную дисперсию, нулевую корреляцию последовательных наблюдений и имеющая корреляционную функцию в виде дельта-функции Дирака) по k -ой координате.

Если функция $V(X,t)$ линейна относительно вектора X , а функция $\alpha(X,t)$ от вектора X не зависит, то уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)N(t), \tag{2}$$

где $A(t)$ - матрица коэффициентов размера $n \times n$, т.е. $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,\,j=1}^{n}$, $B(t)$ -

диагональная матрица размера $n \times n$, т.е. $B(t) = diag[b_1(t),...,b_n(t)]$, $X(t)$ и $N(t)$ - векторы (матрицы-столбцы), которое может быть решено при начальном условии $X(t_0) = X_0$.

Заметив, что взаимные корреляционные функции отдельных составляющих многомерного белого шума равны нулю, на основании общего выражения

$$k_N(t,u) = S(t)\,\delta(t-u)$$

корреляционной функции белого шума [4], где $S(t)$ - спектральная плотность белого шума, для корреляционной матрицы $K_N(t,u)$ процесса $N(t)$, являющейся многомерным белым шумом, получим:

$$K_N(t,u) = diag[S_1(t),...,S_n(t)]\,\delta(t-u) = R(t)\,\delta(t-u),$$

здесь $R(t)$ - матрица спектральных плотностей многомерного белого шума $N(t)$.

Возможны ситуации, когда $A(t)$ может быть представлена в виде: $A(t) = A_o + \lambda A_1(t)$, где A_0 - постоянная матрица, $A_1(t)$ - случайная матрица, λ - параметр, измеряющий значение флуктуаций в коэффициентах. В этом случае можно изучать уравнение (2), когда математическое ожидание $A_1(t)$ равно нулю и когда оно отлично от нуля.

Для нахождения математического ожидания и вычисления ковариационной функции случайного процесса $X(t)$ через решение задачи Коши для уравнения (2) возникают трудности, связанные с необходимостью получения фундаментальных решений соответствующих однородных уравнений. В случае, когда $A(t) = A_0 + \lambda A_1(t)$, где A_0 - невырожденная матрица и $M[A_1(t)] = 0$, отыскивая решение соответствующего однородного уравнения для (2) в виде $X(t) = e^{tA_0} \cdot U(t)$, относительно $U(t)$ получим:

$$\frac{dU}{dt} = \lambda \underbrace{e^{-tA_0} A_1(t) e^{tA_0}}_{V(t)} U \equiv \lambda V(t) U. \tag{3}$$

Решение, с точностью до второго порядка по $U(0) = X(0) = a$, имеет вид:

$$U(t) = a + \lambda \int_0^t V(t_1)\,dt_1 \cdot a + \lambda^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} V(t_1)\,V(t_2)\,dt_2 \cdot a + \dots. \tag{4}$$

Теперь возьмем среднее с фиксированным *a:*

$$M[U(t)] = a + \lambda^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} M\,[V(t_1)\,V(t_2)]\,dt_2 \cdot a, \tag{5}$$

а это приближение второго порядка можно использовать до тех пор, пока члены более высоких порядков малы и это ограничение равносильно условию $\lambda << 1$.

Из последнего соотношения, дифференцируя по *t,* можно получить дифференциальное уравнение для математического ожидания вектора состояния финансового рынка [4, стр. 267].

Рассмотрим дифференциальное уравнение для ковариационной матрицы

[4, стр. 268]:

$$\frac{dK}{dt} = AK + KA^T + Q \qquad (6)$$

с начальным условием $K(0) = K_0$. Здесь A^T - транспонирование матрицы A; Q – ковариационная матрица возбуждающего процесса типа белого шума в правой части с единичным коэффициентом флуктуации. Решим задачу Коши для (6). Сначала получим соотношение для средних величин:

$$\frac{d}{dt} M[y_i] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) M[y_j], \quad M[y_i]_0 = y_{io}. \qquad (7)$$

В матричных обозначениях, когда Y – вектор с компонентами y_i, имеем

$$\frac{d}{dt} M[Y] = A(t) M[Y], \quad M[Y]_0 = Y_0 \qquad (8)$$

и решение имеет вид: $M[Y]_t = \Upsilon(t) \cdot Y_0$, где $\Upsilon(t)$ - решение задачи:

$$\frac{d\Upsilon(t)}{dt} = A(t)\,\Upsilon(t), \quad \Upsilon(0) = 1. \qquad (9)$$

Преобразуем K с помощью соотношения $K(t) = \Upsilon(t) \widetilde{K}(t) \Upsilon^T(t)$.

Подставляя это в (6) и используя прямое и обратное транспонированное соотношение (9), получаем

$$\widetilde{K}(t) = \Upsilon^{-1} Q \left(\Upsilon^T\right)^{-1}.$$

Интегрирование дает:

$$\widetilde{K}(t) - \widetilde{K}(0) = \int_0^t \Upsilon^{-1}(t_1)\, Q(t_1) \left(\Upsilon^T\right)^{-1}(t_1)\, dt_1.$$

Выполняя обратное преобразование, получаем:

$$K(t) = \Upsilon(t) K(0) \Upsilon^T(t) + \int_0^t \Upsilon(t) \Upsilon(t_1)^{-1} Q(t_1) Y^T(t_1)^{-1} \Upsilon^T(t)\, dt_1. \qquad (10)$$

Заметим, что если вместо Q взять $B(t)N(t)$, то в (6) и (9) следует заменить Q на $B(t)V(t)B^T(t)$, где V - интенсивность белого шума (в случае постоянной интенсивности спектральная плотность будет равна $V/2\pi$).

Являются актуальными и задачи, для которых неоднородная часть в уравнении (1) не является белым шумом и заданный вместо него n- компонентный случайный вектор может коррелировать коэффициентами однородной части. В анализе финансового рынка необходимо изучение математических описаний и корреляционных свойств решений, а также колебательных структур таких и вышеописанных процессов, вызванных случайными воздействиями; необходим и анализ взрывных колебаний. При этом решения систем дифференциальных уравнений могут содержать циклы с возрастающей амплитудой; такие решения являются неустойчивыми, поскольку даже небольшое отклонение от точки равновесия в какой-то момент уводит со временем траекторию движения далеко от тренда, взрывные колебательные решения получаются, как правило, при больших коэффициентах, характеризующих чрезмерную силу реакции одних переменных на другие, что может привести к большим финансовым катастрофам. Здесь следует изучать как устойчивые финансовые состояния равновесия и периодические движения, так и неустойчивые состояния, которые играют определяющую роль в формировании хаотических и стохастических движений (могут вызывать бифуркационные состояния равновесия), обусловленных решением финансовых задач управления инвестиционными проектами срочных и опционных рынков, на рынке производных ценных бумаг, в локальных фазах состояния равновесия и периодических движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уильям Ф.Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В.Бэйли. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2007, 1027 с.
2. Казаков И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М: Наука, 1975, 432 с.
3. Под ред. К.Леондеса. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. Пер. с английского. М.: Мир, 1980, 407 с.
4. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985, 556 с.

MALİYYƏ BAZARLARININ ÖYRƏNİLMƏSİNDƏ MÜƏYYƏN RİYAZİ ASPEKTLƏR HAQQINDA

E.Q.ORUCOV

XÜLASƏ

Məqalədə maliyyə bazarlarının vəziyyətini (maliyyə instrumentlərinin gəlirliyini, səhmlərin, valyutaların kurs dəyişmələrinin kotirovkalarını) təsvir edən ümumi şəkilli diferensial tənliklər sistemi qurulmuşdur. Diferensial sistemin bəzi əmsalları təsadüfi funksiyalar və sistemə ağ küy şəklində müdaxilələr olduqda sistemin həll trayektoriyaları öyrənilmiş, onların riyazi gözləmələri və dispersiyalarının hesablanması düsturları alınmış, kovariasiya matrisi üçün tənliklər sisteminin Koşi məsələsi həll edilmişdir. Sistemdə partlayış rəqslərinin mümkünlüyü məsələsi təhlil edilmiş, maliyyə fəlakəti təhlükəsinin yaranması halları qeyd edilmişdir.

ABOUT SOME ACTUAL MATHEMATICAL ASPECTS IN STUDYING FINANCIAL MARKETS

E.G.ORUDZHEV

SUMMARY

By the models of technical dynamical systems with random actions mathematical model of financial market in continuous time in a more general view of vectorial-matrix differential equation dependent variable of which is state vector of financial market, is built in this paper the coordinates of this vector are accidental meanings of current yield of financial tool (quotation of changes of courses of shares, currency, etc).

The paper studies in definite limitations on the coefficient of the differential system the properties of trajectories, mathematical expectations, dispersions of these trajectories, and solves the system of differential equations for covariance matrix.

The questions of stability and instability in markets, explosive oscillations that lead to big financial catastrophes are reflected in the article as well.